B-I/ CALCUL DES INCERTITUDES
حـــســاب الإرتـــيـــابـــات

1/ La grandeur physique (المقدار الفيزيائي):

Une grandeur physique est tout ce qui prend, dans des conditions bien déterminées, une valeur numérique définie qui peut varier (augmenter ou diminuer) si ces conditions elles mêmes varient.

2/ Notion de mesure (مفهوم القياس) :

De la mesure de toute grandeur physique ne peut résulter qu'une valeur approchée et ce pour les raisons suivantes :

- Les erreurs systématiques : Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou d'instruments imparfaits.

Dans toutes les mesures précises, les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des instruments de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de différentes méthodes.

- Les erreurs accidentelles qui sont imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur. Ces erreurs peuvent être minimisées par le bon choix des méthodes de mesure appropriées, des instruments perfectionnés et en s'exerçant à la pratique des mesures.

En résumé le résultat de toute mesure comporte une erreur !!

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur X, nous n'obtenons qu'une valeur approchée x. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** (الخطأ المطلق) qu'on désigne par δx :

$$\boxed{\delta x = x - x_0} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Cette erreur est en général inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de **incertitude absolue** (إرتياب مطلق) de la grandeur X.

$$\boxed{|\delta x| \leq \Delta x} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Nous déduisons que la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues : $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$.

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f(x, y, z)$ où x, y et z représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de X, c'est-à-dire ΔX, est matérialisée par la différentielle dX telle que $\Delta X \leq |dX|$.

Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que $dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

L'incertitude absolue ΔX de X s'écrit donc :

$$\boxed{\Delta X \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z} \qquad \textbf{(1.7)}$$

❖ **Définition** : On appelle **incertitude relative** (الإرتياب النسبي) d'une grandeur X le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta X}{X}$, et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|} \qquad \textbf{(1.8)}$$

3/ Théorème des incertitudes (نظرية الارتيابات):

❖ **Incertitude absolue d'une somme algébrique (الارتياب المطلق لمجموع جبري):**

➢ **L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres.**

Soit la somme algébrique : $y = nu + pv - qw + k$ où n, p et q sont des coefficients constants et positifs, k une constante sans incertitude et $\Delta u, \Delta v$ et Δw les incertitudes absolues respectives de u, v et w. L'incertitude absolue de y est $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$.

$$\boxed{y = nu + pv - qw + k \Rightarrow \Delta y = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w} \qquad \textbf{(1.9)}$$

Important : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$\boxed{y_0 = (y \pm \Delta y)\, u} \qquad \textbf{(1.10)}$$

y_0 : valeur exacte $\quad$ y : valeur approchée

Δy : incertitude absolue $\quad$ u : unité de la grandeur

Exemple 1.6 : En déterminant la masse M par la méthode de la double pesée, on obtient $m_1 = 12.762g$ et $m_2 = 57.327g$. Sachant que l'incertitude absolue sur m_1 et m_2 est de $\Delta m = \pm 2mg$, calculer M et ΔM .

Réponse :

$$M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44.565g$$
$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4mg = 0.004g$$

Ainsi, le résultat s'écrit toujours sous la forme ci-dessous de telle façon que, le nombre de chiffres significatifs après la virgule dans la valeur approchée, soit le même que dans l'incertitude absolue.

$$\boxed{M = (44.565 \pm 0.004)g}$$

Tandis que l'incertitude relative sur M est :

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{0.004}{44.565}\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

ou

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{\Delta m_1+\Delta m_2}{m_2-m_1}\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

❖ **L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient** (الارتاب النسبي لجداء أو كسر)

Nous devons distinguer deux cas :

Premier cas : grandeurs indépendantes.

Enoncé du théorème : L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient dont les grandeurs sont indépendantes les unes des autres est égale à la somme arithmétique des incertitudes relatives sur chaque terme.

Preuve mathématique :

Soit le produit $y=ku^n v^p w^{-q}$ où n,p et q sont des nombres réels et k une constante connue avec exactitude ; les incertitudes absolues sur u,v et w sont respectivement Δu, Δv et Δw.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation

$$\log y=\log\left[ku^n v^p w^{-q}\right]$$

D'après les propriétés du logarithme nous pouvons écrire :

$$\log y=\log k+n\log u+p\log v-q\log w$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+n\frac{du}{u}+p\frac{dv}{v}-q\frac{dw}{w}$$

Nous arrivons à l'expression de l'incertitude relative (après avoir changé le signe – en signe +) et en prenant l'incertitude absolue des nombres :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=|n|\frac{\Delta u}{u}+|p|\frac{\Delta v}{v}+|q|\frac{\Delta w}{w}} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Nous retiendrons la règle générale qui gère ce type de calcul :

- Remplacer tous les symboles di par Δi
- Changer le signe – par le signe +
- Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de Δ en valeurs absolues

Deuxième cas : grandeurs dépendantes les unes des autres.

Soit $$y=k\frac{u^\alpha v^\beta}{(u+v)^\gamma t^\delta}$$

En suivant la même démarche que précédemment nous obtenons :

$$\log y=\log k+\alpha\log u+\beta\log v-\gamma\log(u+v)-\delta\log t$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+\alpha\frac{du}{u}+\beta\frac{dv}{v}-\gamma\frac{du}{u+v}-\gamma\frac{dv}{u+v}-\delta\frac{dt}{t}$$

Factorisons tous les termes ayant le même di et changeons le signe – par le signe + :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+du\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+dv\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)-\delta\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta u+\left|\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta v+\left|\frac{\delta}{t}\right|\Delta t} \qquad \textbf{(1.12)}$$

Exemple1.7 : Calculer l'incertitude relative puis l'incertitude absolue de l'énergie électrique exprimée par la formule $Q=RI^2t$.

Réponse : selon le théorème de l'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient, nous pouvons écrire :

$$Q=RI^2t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}$$

Nous en déduisons l'expression de l'incertitude absolue sur Q :

$$\Delta Q=Q\left(\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}\right)$$